CAPITULO III: Triángulos

Ejercicio Introductorio.

Javier juega haciendo triángulos con ocho pedazos de varillas que tienen diferentes longitudes.

1. Primero tiene un triángulo cuyos lados miden $20cm, 50cm$ y $35cm$. Nota que la cuarta varilla mide justamente igual que lo que miden las tres varillas una junta a la otra. ¿Cuánto mide esa cuarta varilla?

2. Toma la varilla que mide $50cm$ y la parte en tres pedazos para formar un triángulo. Dos de esas varillas miden $18cm$ y $15cm$, ¿cuánto mide la tercera varilla?

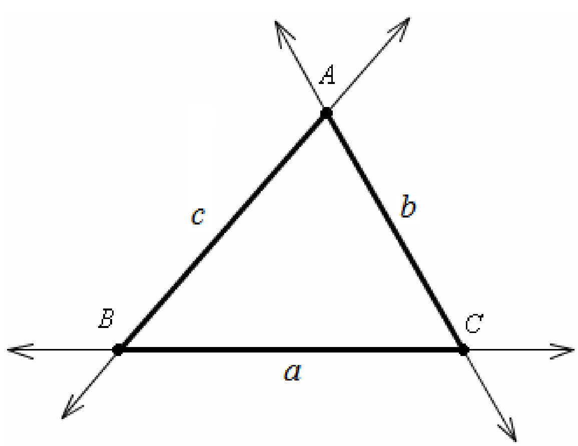
3. Ahora, intenta formar un triángulo con las varillas que miden $35cm, 15cm$ y esa última varilla y no logra. ¿Por qué?

4. Con tres de las varillas forma un triángulo y dos de sus ángulos miden $40°, 80°$. ¿Cuánto mide el tercer ángulo?

5. Javier nota que dos de las varillas miden igual. Al utilizarlas para formar un triángulo estas forman un ángulo de $110°$. ¿Cuánto miden los otros ángulos de ese triángulo?

Necesitamos dar una definición formal para el concepto de triángulo:

> Un **triángulo** es la unión de los segmentos determinados por tres puntos no colineales.



Estas líneas no concurrentes se intersecan (dos a dos) en tres puntos que se llaman **vértices** del triángulo. Los segmentos formados por los vértices se llaman **lados** del triángulo.

Los ángulos $\angle A, \angle B, \angle C$ se llaman **ángulos internos.**

Por lo general, denotamos un lado del triángulo con la letra minúscula correspondiente al vértice opuesto.

Por ejemplo, denotamos $\overline{BC} = a$ y $\overline{AC} = b$.

Esta es la notación estándar para los lados de un triángulo.

A. Propiedades básicas

A.1 Perímetro

Una de las características más importantes de los triángulos, es su **perímetro.**

Este nos permite saber la longitud de un segmento que se formaría si uniéramos los lados del triángulo, y así resolver problemas con eso.

> En un triángulo **el perímetro** es la suma de las longitudes de sus lados, es decir $P = a + b + c$.

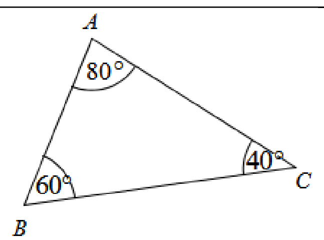
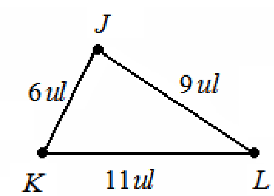
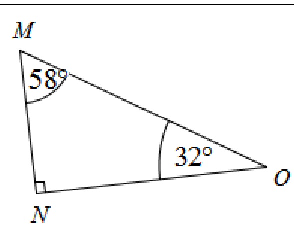
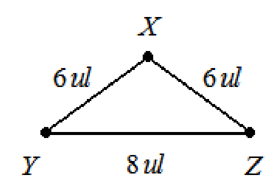
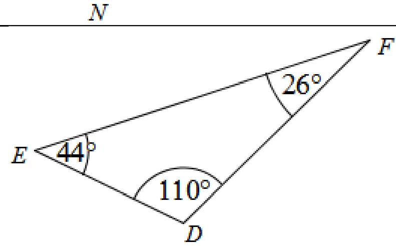
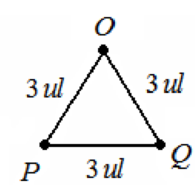
EJEMPLO 1. En el triángulo ΔABC, se tiene que $AB = 12\,dm$, $BC = 8\,dm$ y $AC = 14\,dm$. Encuentre el perímetro.

EJEMPLO 2. En el triángulo ΔABC, se tiene que $AB = 7\,cm$, $BC = 5\,cm$ y el perímetro del triángulo es $18\,cm$. Encuentre la medida del lado $\overline{AC}$.

A.2 Clasificación

Desde la escuela primaria hemos trabajado la clasificación de los triángulos en dos sentidos: por la medida de sus lados, y por la medida de sus ángulos.

Esta clasificación es importante como veremos más adelante, porque algunas de las propiedades se cumplen para ciertos triángulos y para otros no.

SEGÚN LA MEDIDA DE SUS **ÁNGULOS**		SEGÚN LA MEDIDA DE SUS **LADOS**	
Acutángulo: Tiene sus tres ángulos agudos.		**Escaleno:** Tiene sus tres lados de distinta medida.	
Rectángulo: Tiene uno de sus ángulos recto.		**Isósceles:** Tiene al menos dos de sus lados congruentes.	
Obtusángulo: Tiene uno de sus ángulos obtuso.		**Equilátero:** Es un triángulo isósceles con sus tres lados congruentes.	

Soluciones A.

EJEMPLO 1. En el triángulo ΔABC, se tiene que $AB = 12\,dm$, $BC = 8\,dm$ y $AC = 14\,dm$. Encuentre el perímetro.

Tenemos que $P_{\Delta ABC} = 12 + 8 + 14 \Rightarrow P_{\Delta ABC} = 34\,dm$.

EJEMPLO 2. En el triángulo ΔABC, se tiene que $AB = 7\,cm$, $BC = 5\,cm$ y el perímetro del triángulo es $18\,cm$. Encuentre la medida del lado $\overline{AC}$.

Los dos lados dados suman $7 + 5 = 12$ y, por lo tanto, el tercer lado debe medir $AC = 18 - 12 = 6$.

Ejercicio A.

I PARTE: En la siguiente tabla, encuentre cada valor de x que completa los datos correspondientes a los lados y el perímetro de cada triángulo.

	a	b	c	**Perímetro**	**Operaciones**
1.	$4cm$	$6cm$	$8cm$	x	
2.	$12,44m$	$8,16m$	$9,40m$	x	
3.	$\frac{2}{3}\ dm$	$\frac{5}{3}\ dm$	$\frac{4}{3}dm$	x	
4.	$122cm$	$14dm$	$0,2m$	x (en dm)	
5.	$5cm$	$4cm$	x	$14cm$	
6.	x	$5,20m$	$840cm$	$20m$	
7.	$95cm$	x	$0,1m$	$20dm$	
8.	$12cm$	x	x	$28cm$	
9.	x	x	x	$45m$	
10.	x	x	$31cm$	$115cm$	

II PARTE: Resuelva los siguientes problemas

1. Un terreno tiene forma triangular, sus lados miden $40m, 50m$ y $30m$. Se quiere bordear con una cerca. ¿Cuántos metros de cerca se necesitarán?

2. Se tienen dos pedazos de varilla que miden $30cm$ y $40cm$. Se quiere cortar en dos partes uno de ellos para formar un triángulo. ¿Cambiaría el perímetro del triángulo dependiendo del pedazo cortado?

3. Los dos triángulos de seguridad del carro de Juan tienen juntos perímetro igual a $1,80m$. Si todos los lados miden igual, ¿cuánto mide cada lado de un triángulo?

4. La familia de Ernesto hace un viaje a una velocidad constante de $40\,{}^{km}\!/\!_{h}$. Van de su casa a la casa de la abuela, después a la casa de la tía y de vuelta a la casa, todo en línea recta. En el primer trayecto tardaron una hora, y en el segundo dos horas. Si la distancia total recorrida fue de $180km$, ¿cuánto tardaron en ir de donde su tía a su casa?

5. Considere un triángulo acutángulo ΔABC y un punto D en el interior del triángulo, tal que el triángulo ΔBDC es rectángulo. ¿Cómo se clasifican los triángulos ΔADB y ΔADC según sus ángulos?

6. Considere un triángulo ΔABC rectángulo en A. Sea D un punto en el interior del triángulo ¿Cómo se clasifican los triángulo ΔADB y ΔADC según sus ángulos?

III PARTE: Escribir F (falso) ó V (Verdadero) según corresponda a la proposición. Justifique su respuesta.

1.___ Un triángulo puede ser isósceles y obtusángulo al mismo tiempo.

2.___ Un triángulo puede ser equilátero y obtusángulo al mismo tiempo.

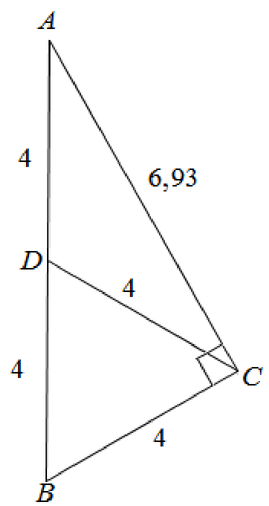
3.___ Un triángulo puede ser escaleno y rectángulo al mismo tiempo.

4.___ Un triángulo puede ser acutángulo y rectángulo al mismo tiempo.

5.___ El triángulo con lados $8,12$ y 10 es escaleno.

IV PARTE: En cada una de las siguientes figuras identifique cada uno de los triángulos pedidos.

1.



a) Un Δ rectángulo.

b) Un Δ acutángulo.

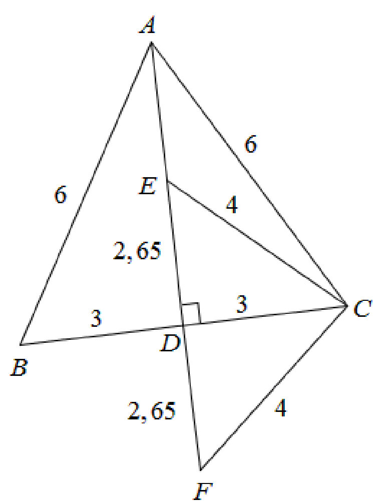
c) Un Δ obtusángulo.

d) Un Δ escaleno.

e) Un Δ isósceles (no equilátero).

f) Un Δ equilátero.

2.



a) Cuatro Δ rectángulos.

b) Dos Δ acutángulos.

c) Dos Δ obtusángulos.

d) Dos Δ escalenos (no rectángulos).

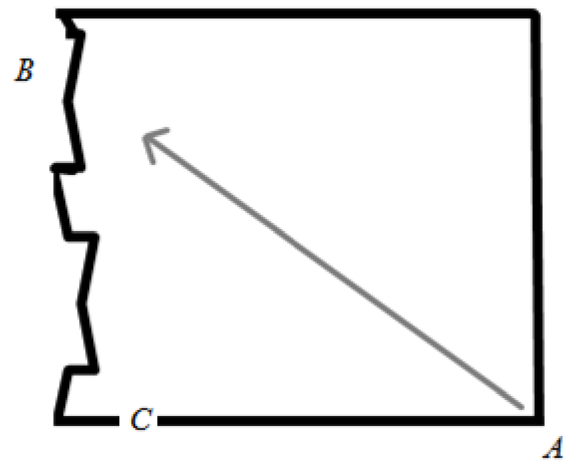
e) Un Δ isósceles (no equilátero).

f) Un Δ equilátero.

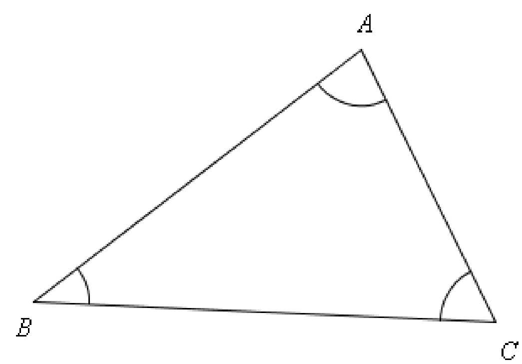
B. Suma de ángulos internos y externos

Ejercicio Introductorio B.

I PARTE: Marcelo gusta de jugar con la perra Abby de su tío. Un día fueron a jugar a un parque donde había un precipicio señalado en la figura con B. Abby estaba en el punto A, salió corriendo muy rápido en dirección al precipicio formando un ángulo de manera que $m\angle CAB = 20°$. ¿En qué dirección debe correr Marcelo, partiendo del punto C de manera que pueda alcanzar a Abby lo más rápido posible?
(Dé su respuesta como un ángulo medido desde C).



II PARTE: En el triángulo anexo, trace una recta $\overleftrightarrow{DE}$ paralela al lado $\overline{BC}$ que pase por A, de forma que $D-A-E$
Complete las siguientes proposiciones:



$m\angle DAB =$ ______, $m\angle EAB =$ ______

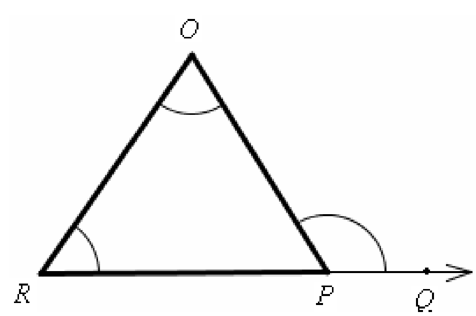
porque ______________________________________

y $m\angle DAB + m\angle BAC + m\angle EAC =$ ______

porque ______________________________________.

Entonces, $m\angle ABC + m\angle CAB + m\angle BCA =$ ___________.

III PARTE: En el triángulo anexo, trace el rayo $\overrightarrow{PS}$. Complete las siguientes proposiciones:



$m\angle SPQ =$ _______ porque __________________________.

$m\angle SPO =$ ________ porque __________________________.

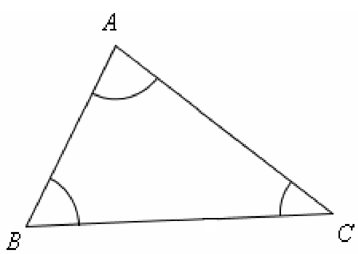
Además, $m\angle SPQ + m\angle SPO =$ ________ .

Entonces, $m\angle ORP + m\angle ROP =$ _________ .

- Los ángulos internos de un triángulo satisfacen una propiedad que permite, teniendo dos de ellos, encontrar la medida del tercero.

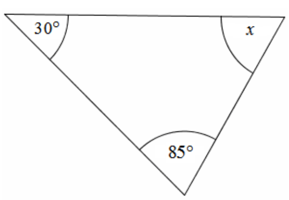
Con base en el ejercicio introductorio, podemos establecer:

TEOREMA (Suma de ángulos internos): "En cualquier triángulo la suma de los ángulos internos es $180°$ ". En la figura: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$

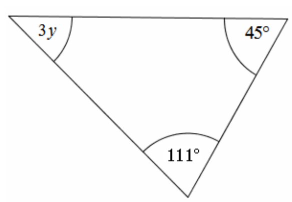


EJEMPLO 3. En las siguientes figuras, encuentre el valor de la variable.

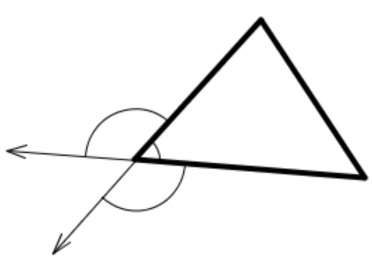
a)



b)

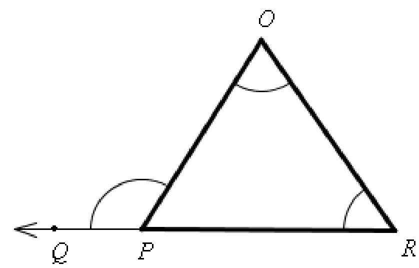


Existen dos ángulos que forman un par lineal con cada uno de los ángulos internos. Estos ángulos reciben el nombre de **ángulos externos** del triángulo.



Sin embargo, en general consideraremos solamente uno de esos dos ángulos para establecer relaciones.

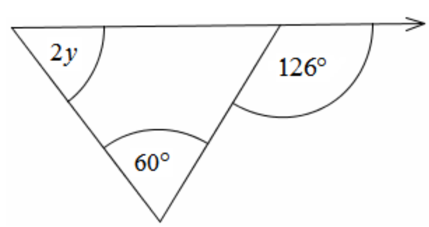
Un **ángulo externo** de un triángulo es el formado por un lado y la prolongación de otro. En la figura, $\angle OPQ$ es un ángulo externo del ΔOPR.



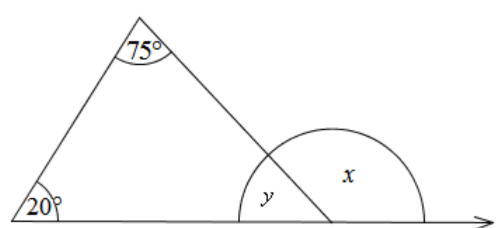
TEOREMA (del ángulo externo): "En cualquier triángulo, la medida de un ángulo externo es la suma de los ángulos internos no adyacentes a este". En la figura: $m\angle R + m\angle O = m\angle OPQ$.

EJEMPLO 4. En las siguientes figuras, encuentre el valor de las variables.

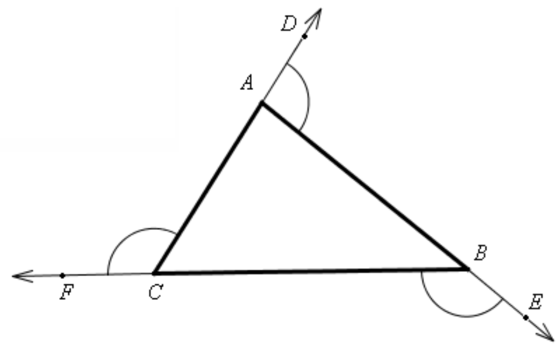
a)



b)



Además, tenemos un resultado si sumamos los tres ángulos externos de cualquier triángulo.



TEOREMA (Suma de ángulos externos):

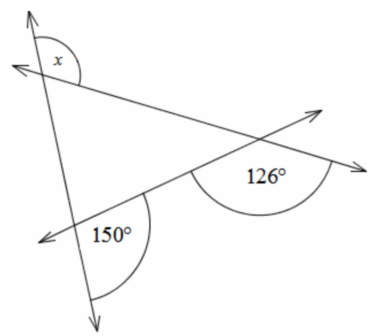
"En cualquier triángulo, la suma de los ángulos externos es $360°$".

En la figura: $m\angle DAB + m\angle EBC + m\angle FCA = 360°$.

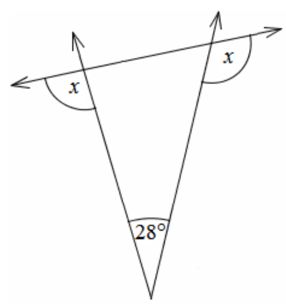
- Siempre en el entendido que nos referimos a solamente un ángulo externo por cada interno.

EJEMPLO 5. **En las siguientes figuras, encuentre el valor de x.**

a)



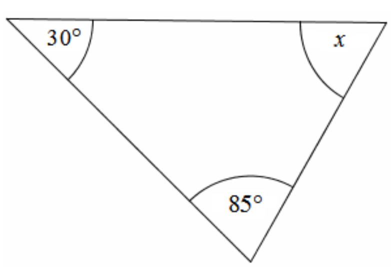
b)



Soluciones B.

EJEMPLO 3. En las siguientes figuras, encuentre el valor de la variable.

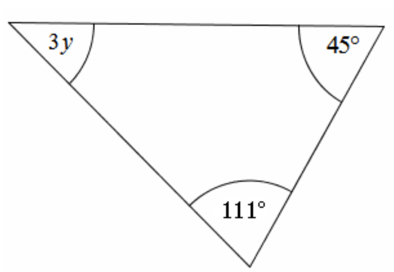
a)



Los dos ángulos dados suman $30° + 85° = 115°$.

Entonces, el ángulo x debe completar los $180°$ de la medida de los ángulos internos del triángulo y por lo tanto $x = 180° - 115° \Rightarrow x = 65°$.

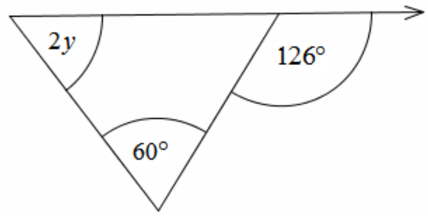
b)



Los dos ángulos dados suman $45° + 111° = 156°$. Entonces, el ángulo $3y$ debe completar los $180°$ de la medida de los ángulos internos del triángulo y por lo tanto $3y = 180° - 156° \Rightarrow 3y = 24°$. Ahora, si $3y = 24°$ entonces y debe ser la tercera parte de $24°$, entonces $y = \frac{24°}{3} \Rightarrow y = 8°$.

EJEMPLO 4. En las siguientes figuras, encuentre el valor de la variable.

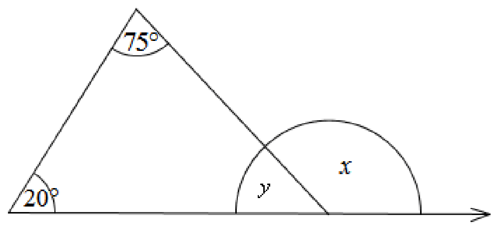
a) Al utilizar el teorema del ángulo externo, los ángulos $2y$ y $60°$ completan el ángulo de $126°$ y, por lo tanto,



$2y = 126° - 60° \Rightarrow 2y = 66°$.

Así, y debe ser la mitad de $66° \Rightarrow y = \dfrac{66°}{2} \Rightarrow y = 33°$.

b)



Para encontrar x, podemos utilizar el teorema del ángulo externo que nos dice que $x = 75° + 20° \Rightarrow x = 95°$.

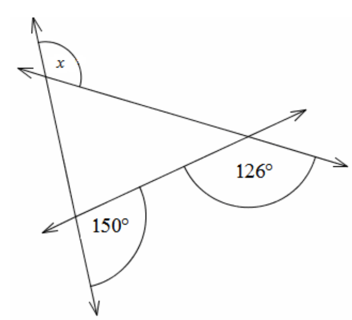
Para encontrar y, podemos ver que es suplementario con x, es decir, $y = 180° - 95° \Rightarrow y = 85°$.

- Para encontrar y también podemos utilizar el teorema de la suma de ángulos internos: y debe ser lo que completa $180°$ de $75° + 20° = 95°$. Es decir, $y = 180° - 95° \Rightarrow y = 85°$. Observe que en realidad los procedimientos coinciden en las operaciones realizadas.

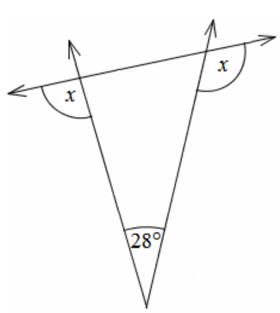
EJEMPLO 5. En las siguientes figuras, encuentre el valor de x.

a) Al aplicar el teorema de la suma de los ángulos externos de un triángulo, tenemos que $x + 150° + 126° = 360°$.

Como $150 + 126° = 276°$, entonces x debe ser $x = 360° - 276° \Rightarrow x = 84°$.



b)



El ángulo externo adyacente a $28°$ mide $180° - 28° = 152°$.

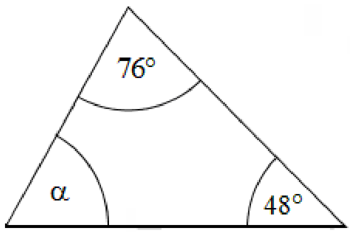
Entonces, al aplicar el teorema de la suma de los ángulos externos de un triángulo obtenemos: $x + x + 152° = 360°$ y, por lo tanto, $2x = 360° - 152° \Rightarrow 2x = 208°$ y esto es posible únicamente si $x = \dfrac{208°}{2} \Rightarrow x = 104°$.

- Es importante resaltar que el ángulo de $28°$ no es externo (ni el opuesto por el vértice a este), por eso para aplicar el teorema debemos encontrar la medida del ángulo externo correspondiente.

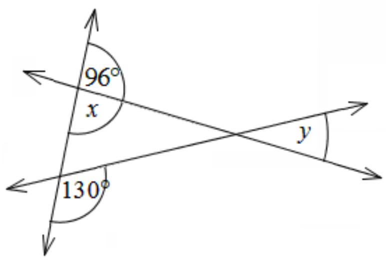
Ejercicio B.

I PARTE: En cada uno de los siguientes dibujos, encuentre los valores de las variables.

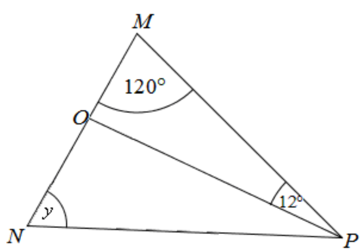
1.



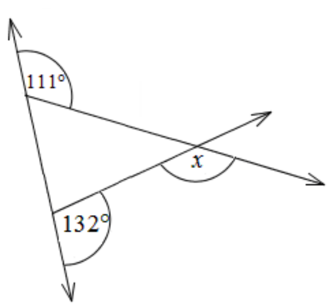
2.



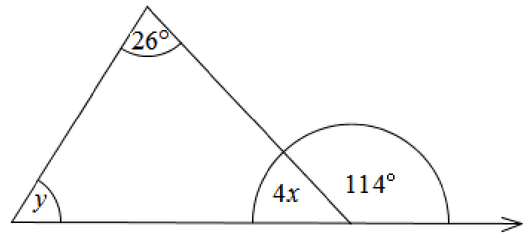
3. $\overrightarrow{PO}$ es bisectriz de $\angle MPN$



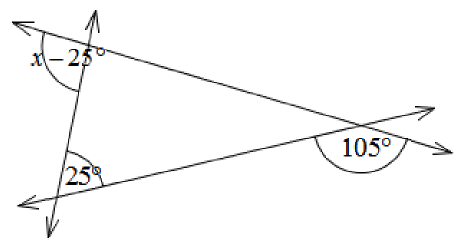
4.



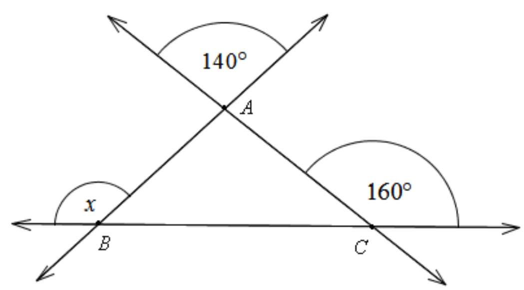
5.



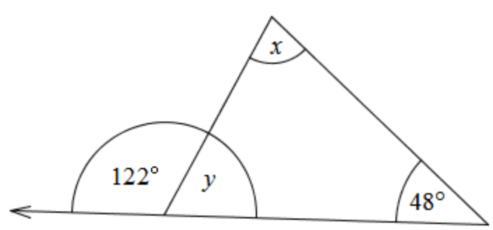
6.



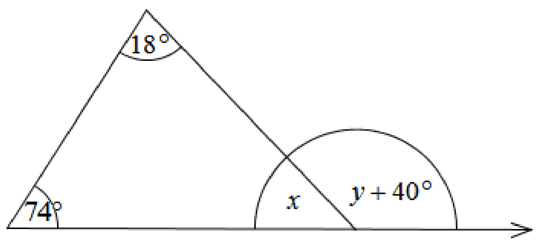
7.



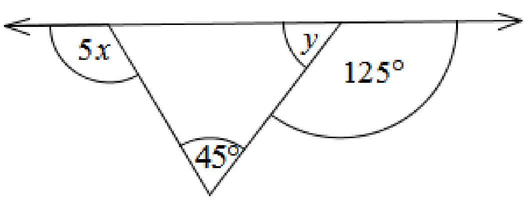
8.



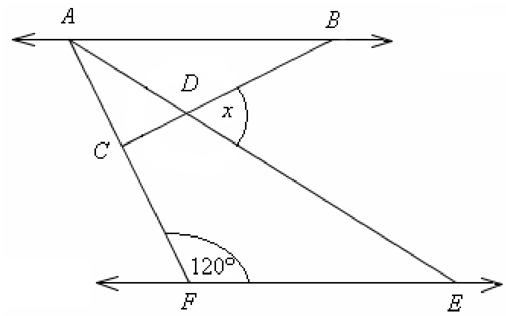
9.



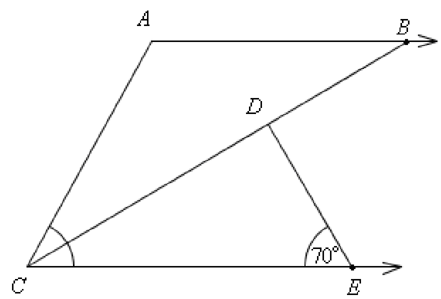
10.



11. Si $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{AE}$ es bisectriz de $\angle FAB$ y $\overline{BC} \perp \overline{AF}$.



12. $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{CB}$ es bisectriz de $\angle ACE$ y $\overline{DE} \perp \overline{CB}$, encuentre $m\angle CAB$.



II PARTE: Resuelva los siguientes problemas.

1. Dos de los ángulos internos de un triángulo miden $48°$ y $79°$. ¿Cuánto mide el tercer ángulo interno?

2. Dos de los ángulos externos de un triángulo miden $124°$ y $120°$. ¿Cuánto mide el tercer ángulo externo?

3. En un triángulo uno de los ángulos externos mide $80°$ y uno de los ángulos internos mide $35°$. ¿Cuánto miden los otros dos ángulos internos?

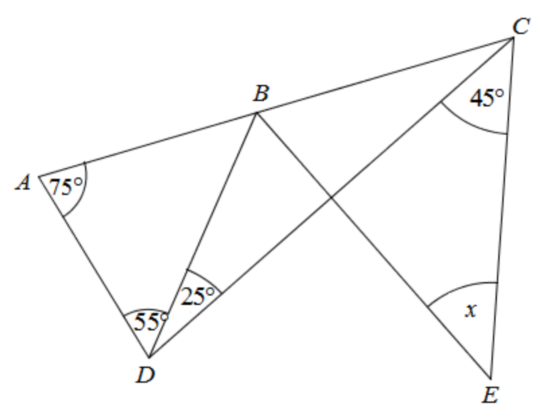
4. En un triángulo el ángulo mayor mide el triple del ángulo menor y el ángulo del medio mide el doble del ángulo menor. ¿Cómo se clasifica este triángulo por sus ángulos?

5. Si uno de los ángulos externos de un triángulo es agudo. ¿Cómo se clasifica este triángulo por sus ángulos?

6. Si uno de los ángulos externos de un triángulo es obtuso ¿Se puede asegurar que el triángulo es acutángulo?

7. Si uno de los ángulos externos de un triángulo es recto ¿Se puede asegurar que el triángulo es rectángulo?

8. Un carpintero formó la siguiente estructura con triángulos y observó la medida de los ángulos señalados y que $\overrightarrow{BE}$ es la bisectriz del $\angle DBC$. Encuentre $m\angle CEB$.



C. Desigualdad triangular

Ejercicio Introductorio C.

1. Construya un triángulo con lados $AB = 5cm,\ BC = 6cm$ y $AC = 4cm$. Mida con el transportador los ángulos del triángulo construido.

2. Con base en la construcción anterior, ordene los ángulos y los lados por su medida, y complete la siguiente tabla. (Utilice los vértices del triángulo para contestar)

<table>
<tr><td rowspan="2">Lados</td><td>Lado mayor:</td><td>Lado del medio:</td><td>Lado menor:</td></tr>
<tr><td>Ángulo opuesto al lado mayor:</td><td>Ángulo opuesto al lado del medio:</td><td>Ángulo opuesto al lado menor:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ángulos</td><td>Ángulo mayor:</td><td>Ángulo del medio:</td><td>Ángulo menor:</td></tr>
<tr><td>Lado opuesto al ángulo mayor:</td><td>Lado opuesto al ángulo del medio:</td><td>Lado opuesto al ángulo menor:</td></tr>
</table>

¿Qué se puede deducir?

3. Construya triángulos con las siguientes longitudes:

a) $4, 3, 5$

b) $\frac{9}{2}, \frac{11}{2}, 3$

c) $4, 4, 6$

d) $2, 3, 6$

e) $7, 7, 7$

f) $4, \frac{9}{2}, 5$

g) $\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, 6$

h) $4, 2, 7$

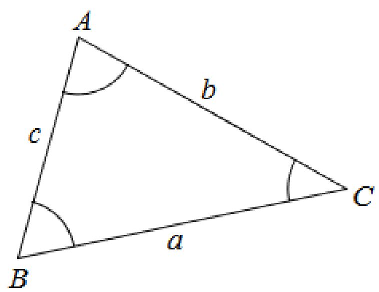
4. ¿Qué pasó en d), g) y h)? ¿Por qué?

5. Si tenemos tres longitudes a, b, c, ¿cómo podríamos saber, sin construirlo, si existe o no el triángulo con esas medidas como lados?

Existen consecuencias muy importantes que se deducen de las observaciones hechas en el ejercicio anterior.
Estas se resumen en la **desigualdad triangular,** y consiste en las desigualdades que se pueden establecer con sus lados. La desigualdad triangular se enuncia en dos partes:

- La desigualdad triangular es una propiedad fundamental que cumplen las medidas de los lados de cualquier triángulo.

Formalmente podemos establecer:

"La suma de las medidas de dos de los lados debe ser mayor que la medida tercer lado".
En la figura, $a+b>c$, $c+a>b$ y $b+c>a$"


En el ejercicio anterior vimos cómo para que un triángulo "cierre" es necesario que los dos lados más pequeños se "traslapen" en el lado de mayor longitud.

Esto se reformula con la desigualdad triangular.

El significado de esta propiedad va más allá de los triángulos, pues en términos de distancias generales como el valor absoluto.

Dados dos números x, y, se debe cumplir que $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert \geq \lvert x+y\rvert$

La utilidad de esta desigualdad para números, será vista oportunamente.

EJEMPLO 6. En cada uno de los siguientes casos, determine si las tripletas de números pueden o no ser las longitudes de los lados de un triángulo.

a) $(13,7,5)$

b) $\left(2,3,\frac{21}{5}\right)$

EJEMPLO 7. Encuentre los valores enteros de x para que exista un triángulo con lados:

a) $(x,5,12)$**, siendo x el lado menor.**

b) $(2x,8,20)$**, siendo $2x$ el lado mayor.**

Además, debemos recalcar otra propiedad que cumple cualquier triángulo que se refiere al orden de la medida de los ángulos, comparado, con el orden de la medida de los lados.

Esto también es parte de la desigualdad triangular:

"En un triángulo, el lado mayor está opuesto al ángulo mayor y el lado menor está opuesto al ángulo menor".
En la figura, si $m\angle A \geq m\angle B \geq m\angle C$, entonces $a \geq b \geq c$

EJEMPLO 8. En el triángulo ΔOPQ se cumple que $OP=20m$, $PQ=15m$ y $QO=12m$.

¿Cuál es el ángulo con mayor medida?

¿Cuál es el ángulo con menor medida?

Soluciones C.

EJEMPLO 6. En cada uno de los siguientes casos, determine si las tripletas de números pueden o no ser las longitudes de los lados de un triángulo.

a) $(13,7,5)$	b) $\left(2,3,\frac{21}{5}\right)$
Como $7+5<13$, no se cumple la desigualdad triangular, entonces no es posible formar un triángulo con esas longitudes como lados.	Si observamos que $\frac{21}{5}=4,2$ vemos que el lado mayor es $\frac{21}{5}$, de donde basta verificar la desigualdad $2+3>\frac{21}{5}$ que es verdadera. Entonces, sí es posible formar un triángulo cuyos lados midan esas longitudes.

EJEMPLO 7. Encuentre los valores enteros de x para que exista un triángulo con lados:

a) $(x,5,12)$, siendo x el lado menor

Si x es el lado menor del triángulo, entonces con certeza $x \le 5$. Luego, la suma de las medidas de los dos lados más pequeños debe ser mayor que la medida del lado mayor, es decir: $x+5>12$. De donde $x>12-5 \Rightarrow x>7$.

Observemos que es imposible que exista un valor que cumpla esas dos condiciones al mismo tiempo.

b) $(2x,8,20)$, siendo $2x$ el lado mayor

Para que $2x$ sea el lado mayor, es necesario que $2x$ sea mayor o igual que 20 y eso es posible solamente si x es mayor o igual que 10.

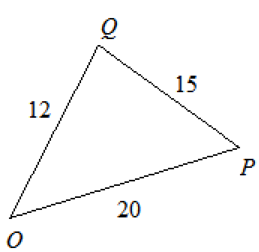
Ahora, por desigualdad triangular $2x$ tiene que ser menor que la suma de los otros dos lados, es decir, 28.

Esto es posible, únicamente si x es menor que 14.

Entonces, $10 \le x < 14$. Los valores enteros que cumplen son $10,\ 11,\ 12$ y 13.

- Observamos la condición: "$2x$ es el lado mayor" que podría interpretarse también $2x>20$. Sin embargo, cuando tenemos una condición de este tipo consideraremos la igualdad como un caso posible.

EJEMPLO 8. En el triángulo ΔOPQ se cumple que $OP=20m$, $PQ=15m$ y $QO=12m$. ¿Cuál es el ángulo con mayor medida? ¿Cuál es el ángulo con menor medida?



En este triángulo, el lado de mayor longitud es $\overline{OP}$, entonces el ángulo de mayor medida es el opuesto a este, es decir, el ángulo $\angle Q$. El de menor medida es, por la misma propiedad, el ángulo $\angle P$.

Ejercicio C.

I PARTE: Escribir F (falso) ó V (Verdadero) según corresponda a la proposición. Justifique su respuesta.

1.___ Un triángulo puede tener tres ángulos congruentes y los lados de diferente medida.

2.___ En el ΔABC se cumple que $AB = 8$, $BC = 15$ y $AC = 9$, entonces el ángulo mayor del triángulo es el ángulo B.

3.___ En el ΔMNO se cumple que $m\angle N = 25°$ y $m\angle O = 140°$, entonces $ON < MN$.

4.___ En el ΔABC con $m\angle ACB = 100°$ y $AB = 13$, entonces necesariamente $BC < 13$.

5.___ En el ΔABC se cumple que $m\angle A = 70°$ y $m\angle C = 85°$, entonces el lado del triángulo de menor medida es $\overline{BC}$.

II PARTE: Para cada uno de los siguientes casos, determine si las tripletas de números pueden o no ser las longitudes de los lados de un triángulo.

1. $(2,7,6)$

2. $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{4}\right)$

3. $(764, 1336, 2010)$

4. $\left(\frac{7}{6},\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right)$

5. $(4,8,3)$

6. $\left(\frac{23}{10},\frac{169}{100},4\right)$

7. $(1, 4, 2)$

8. $(9, 11, 19)$

9. $(4, 2, 2)$

10. $(6, 8, 13)$

11. $(2^2, 3^2, 4^2)$

12. $(\sqrt{1},\sqrt{4},\sqrt{9})$

III PARTE: Resuelva los siguientes problemas:

1. Un triángulo tiene lados x, 5 y 8, siendo x el lado menor. ¿Cuáles son los posibles valores enteros de x?

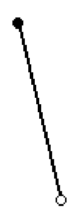
2. Si x es el lado mayor de un triángulo con lados 12, x y 15, ¿Cuáles son los posibles valores enteros de x?

3. Un triángulo tiene lados x, 2 y 5 ¿Cuáles son los posibles valores enteros de x?

4. Un triángulo tiene lados x, 3 y $\frac{7}{2}$ ¿Cuáles son los posibles valores enteros de x?

5. ¿**Cuántos** números enteros pueden representar la medida del lado menor de un triángulo cuyos otros lados miden $2,3$ y $4,5$?

6. Marco tiene treinta varillas de la misma longitud como la que se muestra en la figura. Estas varillas se pueden pegar unas a otras. Marco desea formar una estructura triangular de manera que uno de los lados esté formado por 10 varillas y otro por 3 varillas.

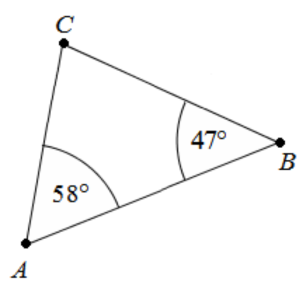


a. ¿Cuál es el número máximo de varillas que le pueden sobrar?

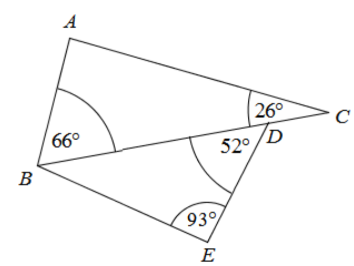
b. ¿Cuál es el número mínimo de varillas que le pueden sobrar?

7. Según hemos estudiado, en un triángulo el lado mayor debe estar opuesto al ángulo mayor. ¿Qué pasa con los ángulos opuestos de los lados congruentes de un triángulo que es isósceles?

8. En la siguiente figura, encuentre el lado del triángulo ΔABC que tiene mayor medida. (No se permite medir)



9. De todos los segmentos dibujados en la siguiente figura, ¿Cuál es el que tiene mayor medida? Justifique sin medir.



10. Dos automóviles viajarán a la misma velocidad constante de la ciudad A a la ciudad B. El primero directamente, mientras que el segundo debe pasar antes por la ciudad C que está a $3km$ de A. Se sabe que: El primer auto tardó exactamente la mitad del tiempo que el segundo en llegar B, la distancia entre la ciudad C y la ciudad B es más de $5km$ y que las distancias entre las ciudades son números enteros (sin decimales) de kilómetros.

Encuentre la distancia entre la ciudad A y la ciudad B.

D. Propiedades de los triángulos isósceles y equiláteros

Ejercicio Introductorio D.

Resuelva los siguientes problemas.

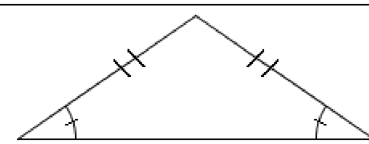
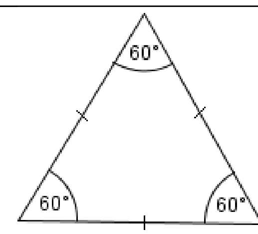
1. Desde una torre de control se ubican dos aviones. El avión A a 30° norte desde el este, y el avión B, directamente al sur. Seis kilómetros más lejos, exactamente en la misma dirección del avión A, vista por la torre de control hay un helicóptero que reporta que está a la misma distancia que del avión B que del avión A. Encuentre la distancia del helicóptero a la torre de control.

2. Considere el triángulo isósceles ΔABC con $AB = AC$ y $m\angle ABC = 36^\circ$. Se traza la bisectriz desde el ángulo B y esta interseca al lado AC en D. ¿Qué relación puede encontrar entre los triángulos ΔABC y ΔBDC ?

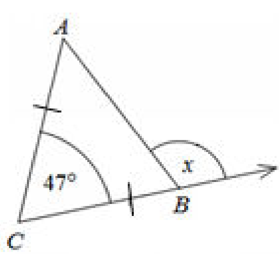
Los triángulos isósceles tienen una relación importante con respecto a los ángulos que forman el lado (posiblemente) desigual.

Además, en un triángulo equilátero no solamente los lados tienen que tener la misma medida.

Resumimos esas propiedades:

Triángulo isósceles • Los ángulos que forman la base (lado posiblemente desigual) con los lados de igual medida **son congruentes**.	
Triángulo equilátero • Los tres ángulos son congruentes; cada uno mide 60°.	

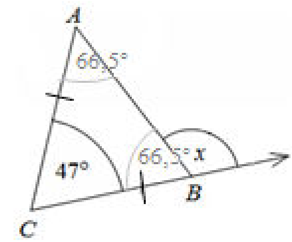
EJEMPLO 9. Con base en la siguiente figura, encuentre el valor de x.



EJEMPLO 10. En el ΔABC se tiene que $m\angle BAC = 60^\circ$. Sea M el punto medio de $\overline{AC}$ y N un punto de $\overline{BC}$. Si $AB = 4$, $NC = 2$ y $AM = 2$, encuentre la medida del $\angle NMA$.

Soluciones D.

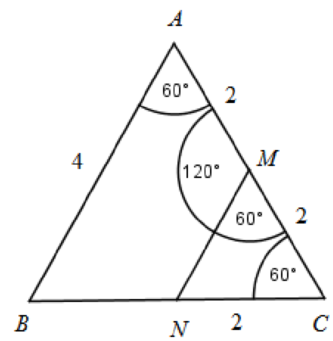
EJEMPLO 9. Con base en la siguiente figura, encuentre el valor de x.



Como el triángulo es isósceles con $AB = AC$, entonces $\angle B \cong \angle A$, y como estos deben sumar $180° - 47° = 133°$ cada uno de ellos debe medir $\frac{133°}{2} = 66,5°$.

El ángulo externo es suplementario a $\angle B$ y mide $x = 180° - 66,5° \Rightarrow x = 113,5°$.

EJEMPLO 10. En el ΔABC se tiene que $m\angle BAC = 60°$. Sea M el punto medio de $\overline{AC}$ y N un punto de $\overline{BC}$. Si $AB = 4$, $NC = 2$ y $AM = 2$, encuentre la medida del $\angle NMA$.



Note que como M es el punto medio de $\overline{AC}$, entonces, $AC = 4$.

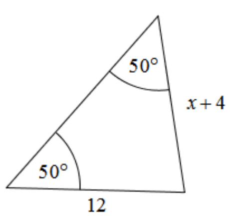
Como el otro lado también mide 4 el triángulo ΔABC es isósceles.

Pero sus lados congruentes forman un ángulo de $60°$, entonces, sus otros dos ángulos deben medir $\frac{180° - 60°}{2} = 60°$, y por lo tanto, el triángulo es en realidad equilátero. Así, $m\angle ACN = 60°$ y por un argumento similar, podemos establecer que ΔNMC es también equilátero de lado 2.

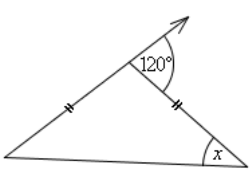
Entonces, $m\angle NMC = 60° \Rightarrow m\angle NMA = 180° - 60° = 120°$.

Ejercicio D. En las siguientes figuras, encuentre los valores de las variables:

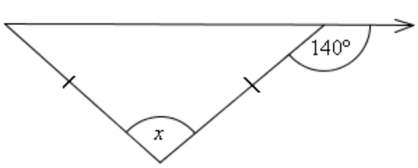
1.



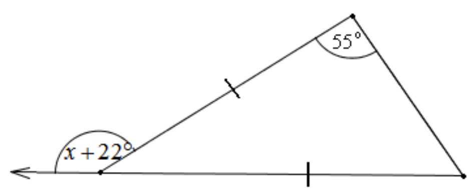
2.



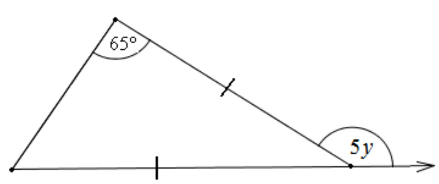
3.



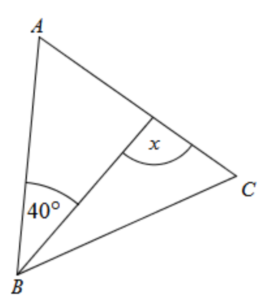
4.



5.



6. El ΔABC es equilátero



AUTOEVALUACIÓN Triángulos

I PARTE: Selección única

Suma de ángulos internos y externos

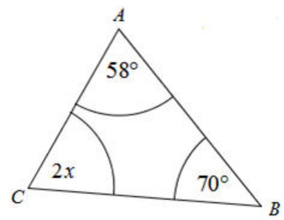
1) Con base en los datos de la figura, la medida del ángulo $\angle BCA$ es:

A) $26°$

B) $52°$

C) $58°$

D) $118°$



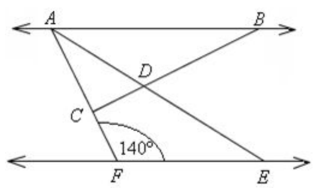
2) Con base en los datos de la figura, en la que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{FE}$, $\overline{AE}$ es bisectriz de $\angle FAB$ y $\overline{BC} \perp \overline{AF}$, entonces la medida del ángulo $\angle CDE$ corresponde a:

A) $90°$

B) $110°$

C) $130°$

D) $140°$



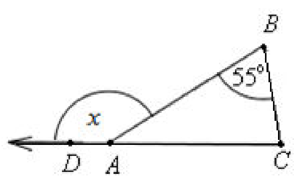
3) En la figura, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, entonces el valor de x corresponde a:

A) $15°$

B) $40°$

C) $110°$

D) $\frac{155°}{3}$



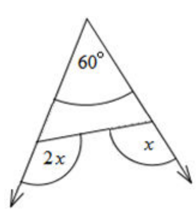
4) Con base en los datos de la figura, el valor de x corresponde a:

A) $40°$

B) $50°$

C) $80°$

D) $100°$



5) En un ΔABC, la medida de un ángulo externo es $100°$ y la medida de un ángulo interno es $50°$, entonces con certeza el triángulo es:

A) Obtusángulo e isósceles.

B) Acutángulo e isósceles.

C) Acutángulo y escaleno.

D) Rectángulo y escaleno.

6) Si un ΔABC es isósceles y $m\angle ABC = 80°$, considere las siguientes proposiciones:

I. $m\angle BAC = 50°$

II. ΔABC es acutángulo.

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

A) Ambas.

B) Ninguna.

C) Solo la I.

D) Solo la II

Desigualdad triangular

7) De las siguientes tripletas:

i) $a = 2,24cm$, $b = 4cm$ y $c = 1,77cm$

ii) $d = 0,43cm$, $e = 5cm$ y $f = 3,4cm$

¿Con cuáles se puede formar un triángulo?

A) Solo la i).

B) Solo la ii).

C) Ambas.

D) Ninguna.

8) De las siguientes tripletas:

i) $a = 0,\overline{3}$, $b = 0,66cm$ y $c = 0,99cm$

ii) $d = 0,45cm$, $e = 0,41cm$ y $f = 0,38cm$

¿Con cuáles se puede formar un triángulo?

A) Solo la i).

B) Solo la ii).

C) Ambas.

D) Ninguna.

9) En el triángulo ΔABC, $AB = 12ul$, $BC = 22ul$ y $AC = 18ul$, entonces el ángulo de mayor medida del triángulo ΔABC es con certeza:

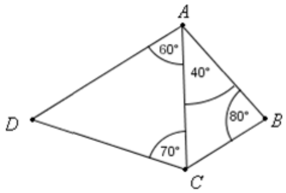
A) $\angle A$

B) $\angle B$

C) $\angle C$

D) No es posible determinarlo.

10) En la siguiente figura, de los siguientes segmentos el que tiene mayor medida es con certeza:



A) $\overline{AC}$

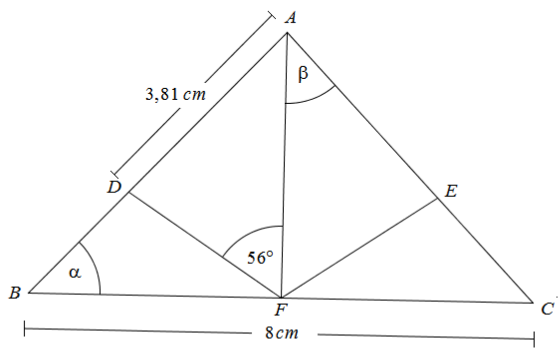
B) $\overline{DC}$

C) $\overline{AB}$

D) $\overline{BC}$

II PARTE: Resuelva los siguientes problemas:

1. En la figura, ΔABC es isósceles con $AB = AC$, $\overline{AF} \perp \overline{BC}$, $m\angle BDF = 106°$ y $AB = 6{,}14\,cm$.



a) Encuentre la medida de $\angle DFB$.

b) Encuentre la medida de α.

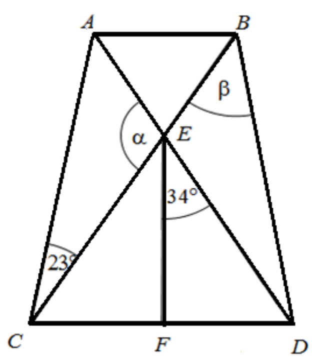
c) Encuentre la medida de AC.

d) Encuentre EA si $EC = 2{,}33$.

e) Clasifique por sus lados al triángulo ΔADE.

f) Encuentre la medida de β.

2. En la figura, ΔAEB es isósceles con $AE = EB$. $AD = 12cm,\ EB = 4cm$.



a) Encuentre ED.

b) Si $\overline{EF} \perp \overline{CD}$, encuentre $m\angle EDF$.

c) Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, encuentre $m\angle CBA$.

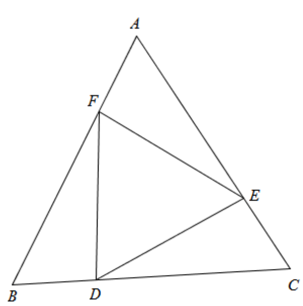
d) El ΔCED es isósceles. ¿Por qué?

e) Encuentre $m\angle CAE$.

f) Encuentre α.

g) Encuentre β justificando sus razonamientos.

3. En la figura, ΔABC es equilátero, $BD = 2cm$, $m\angle AFE = 85°$ y $m\angle BFD = 35°$.



a) Encuentre la medida del $\angle DFE$.

b) Si $\angle DEC \cong \angle BDF$, encuentre la medida de $\angle FED$ y $\angle FDE$.

c) ¿Qué tipo de triángulo es ΔDFE?

d) Si el perímetro del triángulo ΔDEF es $24cm$ y el perímetro de ΔBDF es $19\,cm$, encuentre el perímetro de ΔABC. Justificando sus razonamientos.

4. Evelyn descubrió que los triángulos cumplen una propiedad interesante: “La mitad del perímetro de un triángulo es siempre mayor que cualquier lado de ese triángulo “. Elabora una justificación para la observación de Evelyn.